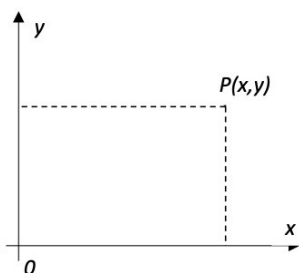


1 Geometria analityczna

1.1 Geometria analityczna na płaszczyźnie

Współrzędne. Położenie dowolnego punktu P na płaszczyźnie można określić za pomocą pewnego układu współrzędnych. Liczby określające położenie punktu nazywamy *współzrędnymi* tego punktu. Najczęściej używane są : *kartezjański układ współrzędnych prostokątnych* i *układ współrzędnych biegunowych*.

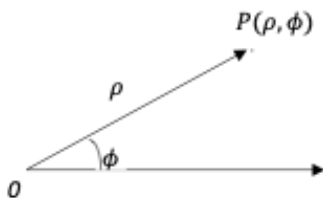
Kartezjański układ współrzędnych prostokątnych powstaje w sposób następujący: Przez dowolnie obrany punkt O zwany *początkiem układu współrzędnych* prowadzi się poziomą oś Ox (*oś odciętych*) skierowaną zazwyczaj w prawo oraz prostopadłą do niej oś pionową Oy (*oś rzędnych*) skierowaną zazwyczaj w górę. Osie Ox i Oy nazywamy *osiąmi współrzędnych*. Dla obu osi współrzędnych obiera się jednostkę miary długości (na ogół dla obu osi taką samą).



Układ kartezjański

Chcąc wyznaczyć punkt P w układzie Oxy znajdujemy rzut P_x punktu P na oś Ox oraz rzut P_y punktu P na oś Oy . *Odciętą x* punktu P nazywamy długość odcinka OP_x opatrzoną znakiem $+$ lub $-$ zależnie od tego, czy punkt P_x leży na dodatniej czy ujemnej części osi Ox , a *rzędną* punktu P nazywamy długość odcinka OP_y opatrzoną znakiem $+$ lub $-$ zależnie od tego, czy punkt P_y leży na dodatniej czy ujemnej części osi Oy . Liczby x i y nazywamy *współzrędnymi kartezjańskimi* punktu P .

Układ współrzędnych biegunowych powstaje w sposób następujący: Obieramy na płaszczyźnie dowolny punkt O zwany *biegunem* i kreślimy półprostą Ox skierowaną zazwyczaj w prawo, tzw. *oś biegunową*, a następnie obieramy jednostkę miary długości. Aby wyznaczyć położenie punktu P we współzrędnym biegunowych podajemy długość ρ odcinka OP oraz kąt ϕ , którego ramieniem początkowym jest półprosta Ox , a ramieniem końcowym jest półprosta OP , przy czym kąt ϕ podajemy w mierze łukowej (w radianach).



Układ biegunowy

Transformacje współrzędnych

Przesunięcie równoległe osi układu wzdłuż osi odciętych o a lub wzdłuż osi rzędnych o b . Oznaczmy współrzędne wyjściowe przed przesunięciem przez x i y i po przesunięciu przez x' i y' (początek nowego układu współrzędnych $0'$ ma stare współrzędne (a, b)), wtedy

$$x = x' + a, \quad y = y' + b \quad \text{oraz} \quad x' = x - a, \quad y' = y - b$$

Obrót układu współrzędnych o kąt α . Współrzędne transformują się następująco:

$$\begin{aligned} x &= x' \cos \alpha - y' \sin \alpha, & y &= x' \sin \alpha + y' \cos \alpha, \\ x' &= x \cos \alpha + y \sin \alpha, & y' &= -x \sin \alpha + y \cos \alpha. \end{aligned}$$

Wzorum powyższym odpowiadają równania macierzowe

$$D = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = D \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \quad \text{lub} \quad \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = D^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Macierz D nazywa się *macierzą obrotu*.

Przejście od współrzędnych prostokątnych do biegunowych i na odwrót. Następujące wzory opisują transformację współrzędnych w przypadku, gdy początek obu układów jest tym samym punktem oraz gdy osie odciętych i biegunowa pokrywają się:

$$x = \rho \cos \phi, \quad y = \rho \sin \phi \quad (-\pi \leq \phi \leq \pi, \rho \geq 0)$$

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\phi = \begin{cases} \arctg \frac{y}{x} + \pi & \text{dla } x < 0 \\ \arctg \frac{y}{x} & \text{dla } x > 0 \end{cases}$$

Dla $x = 0$ oraz $y > 0$ wartość ϕ jest równa $\frac{\pi}{2}$, a dla $x = y = 0$ wartość ϕ jest równa $-\frac{\pi}{2}$.

Odległość między dwoma punktami. We współrzędnych kartezjańskich odległość między punktami $P_1(x_1, y_1)$ i $P_2(x_2, y_2)$ wyraża się wzorem:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Jeśli dane są współrzędne biegunowe punktów $P_1(\rho_1, \phi_1)$ i $P_2(\rho_2, \phi_2)$, to odległość między nimi jest równa:

$$d = \sqrt{\rho_1^2 + \rho_2^2 - 2\rho_1\rho_2 \cos(\phi_2 - \phi_1)}$$

Podział odcinka w ustalonym stosunku. Współrzędne punktu P dzielącego odcinek P_1P_2 w stosunku $\frac{P_1P}{PP_2} = \frac{m}{n} = \lambda$ wyznaczamy za pomocą wzorów:

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda} \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}$$

Dla $\lambda = 1$ otrzymujemy wzory na środek odcinka:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

Pole trójkąta o znanych wierzchołkach. Dane są punkty $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$ i $P_3(x_3, y_3)$. Pole trójkąta o wierzchołkach w tych punktach wyraża się wzorem:

$$S = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

Jeśli pole trójkąta rozpiętego na tych trzech punktach jest równe 0 to te trzy punkty leżą na jednej prostej.

Prosta

Równanie ogólne prostej. Równanie ogólne prostej ma postać:

$$Ax + By + C = 0$$

Dla $A = 0$ prosta jest równoległa do osi Ox , dla $B = 0$ jest równoległa do osi Oy , dla $C = 0$ prosta przechodzi przez początek układu współrzędnych. Wektor $[A, B]$ nazywany jest *wektorem normalnym prostej* i jest do tej prostej prostopadły. Wektor $[B, -A]$ jest wektorem prostopadłym do wektora $[A, B]$ a zatem jest wektorem normalnym prostej prostopadłej do prostej $Ax + By + C = 0$. Każda prosta postaci $Bx - Ay + m = 0$ jest prostopadła do prostej $Ax + By + C = 0$ przy dowolnej wartości m . Warunek równoległości prostych zadanych w postaci ogólnej równaniami $A_1x + b_1y + c_1 = 0$ oraz $A_2x + B_2y + c_2 = 0$ ma postać:

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} = 0$$

zaś warunek prostopadłości ma postać $A_1A_2 + B_1B_2 = 0$. Odległość d punktu $M(x_1, y_1)$ od prostej o równaniu $Ax + By + C = 0$ wyraża się wzorem:

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Równanie kierunkowe prostej. Każda prosta, która nie jest równoległa do osi Oy , może być opisana równaniem postaci

$$y = kx + b$$

Liczbę k nazywamy *współczynnikiem kierunkowym* prostej. Jest on równy tangensowi kąta zawartego między osią Ox a tą prostą. Na osi Oy prosta odcina odcinek długości b . Prosta prostopadła do prostej $y = kx + b$ ma współczynnik kierunkowy $-\frac{1}{k}$.

Równanie prostej przechodzącej przez dany punkt. Równanie prostej przechodzącej przez dany punkt $P(x_1, y_1)$ i nachylonej do osi Ox pod danym kątem α ma postać

$$y - y_1 = k(x - x_1) \text{ gdzie } k = \operatorname{tg} \alpha$$

Równanie prostej przechodzącej przez dwa punkty. Dane są dwa punkty $P_1(x_1, y_1)$ i $P_2(x_2, y_2)$. Równanie prostej, do której te punkty należą, ma postać

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

Równanie odcinkowe prostej. Jeśli dana prosta odcina na osiach Ox i Oy odcinki o długościach odpowiednio a i b , to przy uwzględnieniu znaków równanie tej prostej ma postać:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

Równanie prostej w postaci normalnej (postać Hessego). Niech p będzie odległością prostej od początku układu współrzędnych, α - kątem zawartym między osią Ox i normalną do tej prostej, wtedy $p > 0$ i $0 \leq \alpha < 2\pi$. Następujące równanie nazywamy równaniem normalnym tej prostej:

$$x \cos \alpha + y \sin \alpha - p = 0$$

Równanie prostej w postaci normalnej możemy otrzymać z równania w postaci ogólnej w wyniku przemnożenia przez *czynnik normujący*

$$\mu = \pm \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Znak μ należy określić przeciwnie do znaku C . Gdy $C = 0$ oba znaki wyrażenia są poprawne.

Równanie prostej w postaci biegunowej. Niech p będzie odległością prostej od początku układu współrzędnych, α kątem zawartym między osią biegunową i normalną do tej prostej. Równanie tej prostej w postaci biegunowej przyjmuje postać:

$$\rho = \frac{p}{\cos(\phi - \alpha)}.$$

Kąt między dwoma prostymi. Niech dwie nieprostopadłe proste L_1 i L_2 (rozważane w tej kolejności) będą dane równaniami:

$$\begin{aligned} y &= a_1x + b_1 \\ y &= a_2x + b_2 \end{aligned}$$

Wtedy wzór:

$$\operatorname{tg} \phi = \frac{a_2 - a_1}{1 + a_1a_2}$$

określa tangens kąta między prostymi L_1 i L_2 . Oznacza to, że prosta L_1 obrócona o kąt ϕ względem punktu wspólnego pokryje się z prostą L_2 .

Pęk prostych Zbiór prostych przechodzących przez ustalony punkt $A(x_1, y_1)$ (zwany *wierzchołkiem*) jest opisany równością:

$$y - y_1 = k(x - x_1) \text{ gdzie } k \in \mathbb{R}$$

Krzywe algebraiczne i ich stopień Równanie postaci:

$$Ax + By + C = 0$$

gdzie co najmniej jedna z liczb A i B jest różna od 0 jest równaniem algebraicznym pierwszego stopnia (dwóch zmiennych x i y). Reprezentuje ono zawsze linię prostą. Równanie algebraiczne drugiego stopnia jest dowolnym równaniem postaci:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

gdzie co najmniej jedna z liczb A , B lub C jest różna od 0. Każde równanie równoważne powyższemu jest także nazywane algebraicznym.

Okrąg Okrąg o promieniu R o środku w początku układu współrzędnych jest dany równaniem:

$$x^2 + y^2 = R^2$$

Równanie to stwierdza, że kwadrat odległości od środka okręgu do dowolnego jego punktu jest równy kwadratowi promienia tego okręgu. Okrąg o promieniu R ze środkiem w punkcie $C(a, b)$ jest opisany równaniem:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$$

Równanie powyższe może być napisane w postaci:

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - R^2 = 0$$

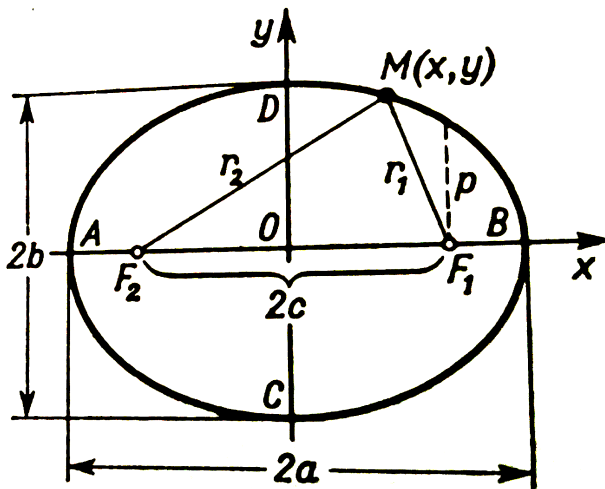
Ogólne równanie drugiego stopnia $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$ przedstawia okrąg wtedy i tylko wtedy, gdy $B = 0$, $A = C$ i $D^2 + E^2 - AF > 0$. Wówczas równanie to można napisać w postaci:

$$x^2 + y^2 + 2mx + 2ny + q = 0$$

gdzie $m^2 + n^2 - q > 0$. Wtedy promień $R = \sqrt{m^2 + n^2 - q}$, a środkiem okręgu jest punkt $C(-m, -n)$. Gdy $q = m^2 + n^2$, równanie wyznacza tylko jeden punkt $C(-m, -n)$. Gdy $q > m^2 + n^2$, to równania nie spełnia żaden punkt o współrzędnych rzeczywistych.

Elipsa. Równanie kanoniczne elipsy (oś wielka elipsy leży na osi Ox , oś mała na osi Oy) jest postaci:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad a > b$$

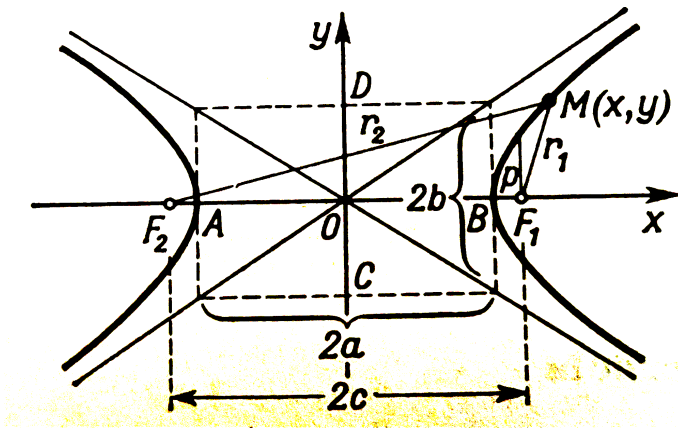


Elementy elipsy.

Oś wielka $AB = 2a$; oś mała $CD = 2b$; wierzchołki A, B, C, D ; środek O ; ogniska F_1 i F_2 - punkty leżące po obu stronach środka w odległości $c = \sqrt{a^2 - b^2}$; mimośród $e = \frac{c}{a} < 1$; parametr ogniskowy $p = \frac{b^2}{a}$ (połowa cięciwy przechodzącej przez jedno z ognisk prostopadle do osi wielkiej).

Hiperbola. Równanie kanoniczne hiperboli (oś rzeczywista hiperboli leży na osi Ox) jest postaci:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$



Elementy hiperboli.

Oś rzeczywista $AB = 2a$; wierzchołki A, B ; środek O ; ogniska F_1 i F_2 - punkty leżące na osi rzeczywistej po obu stronach środka w odległości $c > a$ od niego; oś urojona $CD = 2b$, gdzie $b = \sqrt{c^2 - a^2}$; parametr ogniskowy $p = \frac{b^2}{a}$ (połowa cięciwy przechodzącej przez jedno z ognisk prostopadle do osi rzeczywistej); mimośród $e = \frac{c}{a} > 1$.

1.2 Geometria analityczna w przestrzeni

2 Geometria różniczkowa